10. 4. RÓWNANIE OKRĘGU

Okrąg

Równanie okręgu o środku $S=(a,b)$ i promieniu r

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Przykład 10.4.1. Napisz równanie okręgu o środku $S=(-1,2)$ i promieniu 5.

Rozwiązanie	Komentarz
$(x+1)^2+(y-2)^2=5^2$ $(x+1)^2+(y-2)^2=25$	Wykorzystujemy wzór $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ i wykonujemy podstawienie $a=-1, b=2, r=5$

Przykład 10.4.2. Wyznacz współrzędne środka i promień okręgu o równaniu

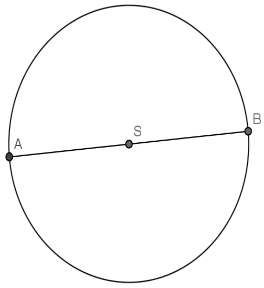
a) $(x-3)^2+(y+5)^2=4$

b) $x^2+y^2=3$

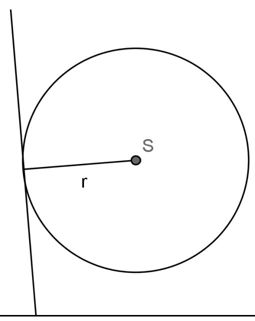
c) $x^2+y^2-2x+4y+1=0$

Rozwiązanie	Komentarz
a) $a=3, b=-5 \Rightarrow S=(3,-5)$ $r^2=4 \Rightarrow r=2$	Wykorzystujemy wzór $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
b) $a=0, b=0 \Rightarrow S=(0,0)$ $r^2=3 \Rightarrow r=\sqrt{3}$	
$x^2+y^2-2x+4y+1=0$ $x^2-2x+1+y^2+4y+4-4=0$ $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ $a=1, b=-2 \Rightarrow S=(1,-2)$ $r^2=4 \Rightarrow r=2$	Równanie $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ doprowadzamy do postaci $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ wykorzystując wzory skróconego mnożenia: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ Odczytujemy S i r.

Przykład 10.4.3. Napisz równanie okręgu , którego średnicą jest odcinek AB, gdzie $A=(-5,2); B=(7,4)$

Rozwiązanie	Komentarz
	Wykonujemy rysunek pomocniczy.
$S=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ $S=\left(\frac{-5+7}{2},\frac{2+4}{2}\right)=\left(\frac{2}{2},\frac{6}{2}\right)=(1,3)$	Wyznaczamy środek okręgu. Środkiem okręgu jest środek średnicy AB. Do wyznaczenia środka wykorzystujemy wzór $S=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ i wykonujemy podstawienie : $x_A=-5, y_A=2, x_B=7, y_B=4$
$r=\frac{1}{2}\lvert AB\rvert=\frac{1}{2}\sqrt{(7+5)^2+(4-2)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+2^2}=$ $\frac{1}{2}\sqrt{144+4}=\frac{1}{2}\sqrt{148}=\frac{1}{2}\sqrt{4\cdot 37}=\sqrt{37}$	Wyznaczamy promień okręgu. Promieniem okręgu jest połowa długości średnicy AB. Do obliczenia długości średnicy stosujemy wzór $\lvert AB\rvert=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$
$(x-1)^2+(y-3)^2=37$	Piszemy równanie okręgu , wykorzystując wzór $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Przykład 10.4.4. Napisz równanie okręgu o środku $S=(-1,0)$ stycznego do prostej $k: x-2y+5=0$.

Rozwiązanie	Komentarz
	Wykonujemy rysunek pomocniczy.
$k: x-2y+5=0 \Rightarrow A=1, B=-2, C=5$ $S=(-1,0)\Rightarrow x_S=-1, y_S=0$ $r=\frac{\lvert 1\cdot(-1)-2\cdot 0+5\rvert}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$	Wyznaczamy długość promienia okręgu – odległość punktu S od stycznej . Wykorzystujemy wzór $d(S,k)=\frac{\lvert Ax_S+By_S+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$(x+1)^2+y^2=\frac{16}{5}$	Piszemy równanie okręgu , wykorzystując wzór $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Przykład 10.4.5. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie *ABC*, gdzie $A=(2,5); B=(0,3); C=(4,3)$.

Rozwiązanie	Komentarz
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$	Wykorzystujemy wzór $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ Aby wyznaczyć równanie okręgu opisanego na trójkącie *ABC* musimy obliczyć *a, b ,r.*
$A=(2,5)$ $(2-a)^2+(5-b)^2=r^2$	Punkt *A* należy do okręgu , zatem jego współrzędne spełniają równanie $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Wykonujemy podstawienie $x=2, y=5$
$B=(0,3)$ $(0-a)^2+(3-b)^2=r^2$	Punkt *B* należy do okręgu , zatem jego współrzędne spełniają równanie $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Wykonujemy podstawienie $x=0, y=3$
$C=(4,3)$ $(4-a)^2+(3-b)^2=r^2$	Punkt *C* należy do okręgu , zatem jego współrzędne spełniają równanie $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Wykonujemy podstawienie $x=4, y=3$
$\begin{cases}(2-a)^2+(5-b)^2=r^2\\(0-a)^2+(3-b)^2=r^2\\(4-a)^2+(3-b)^2=r^2\end{cases}$	Zapisujemy układ równań.
$(0-a)^2+(3-b)^2=(4-a)^2+(3-b)^2$ $(0-a)^2+(3-b)^2-(4-a)^2-(3-b)^2=0$ $a^2-(16-8a+a^2)=0$ $a^2-16+8a-a^2=0$ $8a=16/:8$ $a=2$	Porównując lewe strony drugiego i trzeciego równania ,po zredukowaniu wyrażenia $(3-b)^2$ otrzymujemy równanie z niewiadomą *a*. Obliczamy *a*.
$(2-2)^2+(5-b)^2=r^2$ $(0-2)^2+(3-b)^2=r^2$ $(2-2)^2+(5-b)^2=(0-2)^2+(3-b)^2$ $0+25-10b+b^2=4+9-6b+b^2$ $25-10b+b^2-4-9+6b-b^2=0$ $-4b+12=0$ $-4b=-12/:(-4)$ $b=3$	Obliczoną wartość *a* podstawiamy do pierwszego i drugiego równania. Porównujemy lewe strony tych równań i obliczamy *b*.

$(0-a)^2+(3-b)^2=r^2$ $(0-2)^2+(3-3)^2=r^2$ $r^2=4$ $r=2$	Obliczone wartości *a* i *b* podstawiamy do pierwszego równania i obliczamy *r*.
$(x-2)^2+(y-3)^2=4$	Obliczone wartości *a* , *b* i *r* podstawiamy do równania okręgu.

ĆWICZENIA

<u>Ćwiczenie 10.4.1.</u> (1pkt.) Napisz równanie okręgu o środku $S=(0,-2)$ i promieniu $\sqrt{3}$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie równania okręgu.	1

<u>Ćwiczenie 10.4.2.</u> (2pkt.) Wyznacz współrzędne środka i promień okręgu o równaniu $(x-4)^2+y^2=2$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie środka okręgu.	1
2	Podanie promienia okręgu.	1

<u>Ćwiczenie 10.4.3.</u> (2pkt.) Napisz równanie okręgu o środku $S=(0,2)$ i przechodzącego przez punkt $A=(-4,3)$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Obliczenie promienia okręgu.	1
2	Podanie równania okręgu.	1

<u>Ćwiczenie 10.4.4.</u> (2pkt.) Napisz równanie okręgu o środku $S=(1,-2)$ stycznego do osi OX.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Obliczenie promienia okręgu.	1
2	Podanie równania okręgu.	1